二项式定理的证明

leafduo

August 19, 2008

Abstract

使用数学归纳法证明二项式定理。

二项式定理　对于非负整数 n ，有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{1}$$

Proof. 1. 当 $n=0$ 时

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k \tag{2}$$

命题成立。

2. 假设当 $n = m(m \in Z, m \geq 0)$ 时，命题成立，即

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \tag{3}$$

则当 $n = m+1$ 时有

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m \tag{4}$$

展开

$$= a(a+b)^m + b(a+b)^m \tag{5}$$

应用式 3

$$= a\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k + b\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j} b^k \tag{6}$$

将 a b 乘进去

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j} b^{j+1} \tag{7}$$

令 $j = k - 1$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^{m-k+1} b^k \tag{8}$$

将左边一项 $k = 0$ 和右边一项 $k = m + 1$ 提出来

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^{m-k+1} b^k \tag{9}$$

将两个求和合并起来

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] a^{m-k+1} b^k \tag{10}$$

应用 Pascal's rule

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m-k+1} b^k \tag{11}$$

将左边两项放进求和符号

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m-k+1} b^k \tag{12}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k \tag{13}$$

所以，当 $n = m + 1$ 时，命题成立。

综合 1. 2. ，由数学归纳法，命题成立。 □